SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Daniele Morbidelli

UNA DISUGUAGLIANZA DI SOBOLEV PER CAMPI VETTORIALI NON REGOLARI DI PASSO 2

28 marzo 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto

Proviamo la Disuguaglianza di Sobolev

$$\int_\Omega |u(x)|^q dx \leq C \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega |X_j u(x)|^p dx, \qquad u \in C_0^1(\Omega),$$

per una famiglia $\{X_1, \ldots, X_m\}$ di campi vettoriali di passo 2 a coefficienti non regolari.

Abstract

We prove the Sobolev Inequality

$$\int_\Omega |u(x)|^q dx \leq C \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega |X_j u(x)|^p dx, \qquad u \in C_0^1(\Omega),$$

for a family $\{X_1, \ldots, X_m\}$ of 2-step vector fields with non regular coefficients.

1 Introduzione

In questo seminario esponiamo un risultato ottenuto con Annamaria Montanari in cui diamo condizioni sufficienti per la validità della disuguaglianza di tipo Sobolev

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\sum_{j=1}^{m}\left(\int_\Omega |X_j u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, $q > p \geq 1$, X_j, $j = 1, \ldots, m$ sono m campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$ della forma $X_j = \sum_{k=1}^m a_j^k \partial_k$ e le funzioni $a_j^k = a_j^k(x)$ sono funzioni reali e soddisfano opportune condizioni che descriveremo nel seguito.

Come è noto, la disuguaglianza (1) gioca un ruolo importante nello studio di problemi di regolarità per soluzioni deboli di equazioni del tipo

$$Lu \equiv \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j(\sigma_{j,k}\partial_k u) = f,$$

dove $\sigma_{j,k} = \sum_{i=1}^m a_i^k a_i^j$ è sempre simmetrica e semidefinita positiva. (Se $m = n$ e i campi fossero indipendenti σ sarebbe definita positiva ed L sarebbe un operatore ellittico). Più in particolare, nel recente lavoro [CLM], Citti, Lanconelli e Montanari hanno utilizzato, nello studio della regolarità delle superfici reali di $\mathbb{C}^2$ con curvatura di Levi assegnata positiva e C^∞, proprietà di immersione riguardanti campi in $\mathbb{R}^3$ della forma seguente:

$$X_1 = \partial_1 + a_1(x)\partial_3, \qquad X_2 = \partial_2 + a_2(x)\partial_3, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

a coefficienti *non regolari*.

L'analisi su campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$ è molto sviluppata nel caso in cui i coefficienti a_j^k sono regolari (si vedano le referenze nel seguito). Per lo studio di equazioni non lineari sembra però necessario lo sviluppo di una teoria in condizioni di bassa regolarità. Lo studio (in questa prospettiva) delle proprietà di immersione per campi del tipo (2) e per loro generalizzazioni ha motivato il recente lavoro [LMon] e i risultati che qui esponiamo.

In [MM] è provato quanto segue.

Teorema 1.1 *Consideriamo i campi vettoriali, regolari, in* $\mathbb{R}^n$

$$X_j = \partial_j + \sum_{k=m+1}^{n} a_j^k \partial_k, \quad j = 1, \ldots, m, \quad m \leq n. \tag{3}$$

Fissiamo un aperto Ω *e supponiamo che sia*

$$\partial_j = \sum_{i<k} \lambda_j^{i,k}(x)[X_i, X_k], \qquad j = m+1, \ldots, n, \quad \forall x \in \Omega, \tag{4}$$

dove le $\lambda_j^{i,k} = \lambda_j^{i,k}(x)$ *sono opportune funzioni. Allora, posto* $Q = m + 2(n-m)$, *vale la disuguaglianza*

$$\|f\|_{L^{pQ/(Q-p)}} \leq M\left(\sum_{j=1}^{m}\|X_jf\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}\right), \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad p > 1 \tag{5}$$

e la costante M, *oltre che da* p *e da* Ω, *dipende dalle seguenti quantità:*

$$\|a_j^k\|_{Lip(\Omega)}, \quad \|\lambda_j^{i,l}\|_{L^\infty}, \quad \|X_h\lambda_j^{i,l}\|_{L^Q},$$

dove $i, j, l = 1, \ldots, m$ *e* $k = 1, \ldots, n$.

Qui diamo la prova del Teorema 4 nel caso (più semplice ma già significativo) di 2 campi in $\mathbb{R}^3$. Il caso più generale (esposto in [MM]), pur appoggiandosi sulle stesse idee richiede uno studio più delicato.

Osserviamo infine che

1. Grazie a (3) e a (4), abbiamo, per $j = 1, \ldots, m$

$$\partial_j = X_j - \sum_{k=m+1}^{n} a_j^k\partial_k = X_j - \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{1\leq i<l\leq m}\lambda_k^{i,l}[X_i, X_l].$$

   Questo, assieme a (4) dà la condizione di Hörmander di passo 2

$$\dim(\text{span}\{X_i, [X_i, X_j] : i, j = 1, \ldots, m\}) = n,$$

   che garantisce la validità della Disuguaglianza di Sobolev (5), se i campi sono abbastanza regolari. La novità del risultato che presentiamo sta nella precisazione della dipendenza di M dai campi. La tecnica di prova è diversa da quelle classiche ed è ispirata a delle idee introdotte da Citti [C]. (Poi applicate in Citti, Lanconelli e Montanari [CLM]).

2. Il Teorema 1.1 vale per campi della forma particolare (3). Se però $X_1, \ldots, X_m$ sono campi lipscitziani e linearmente indipendenti in un punto $\bar{x}$, allora si possono trovare dei nuovi campi

$$Y_j = \sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}(x)X_k,$$

   della forma (3) e con $(\alpha_{jk})_{i,k=1,\ldots,m}$ matrice quadrata, lipschitziana e non singolare attorno a $\bar{x}$.

3. L'esponente di sommabilità nel membro di sinistra di (5) è ottimale.

2 Risultati noti

Cominciamo con l'indicare alcuni metodi "classici" per provare la disuguaglianza di Sobolev (1).

Metodo 1. Supponiamo che valga, per un $\varepsilon \in]0,1]$, la stima

$$\|u\|_{W^{\varepsilon,2}} \lesssim \|Xu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{6}$$

(dove $Xu = (X_1u, \dots, X_mu)$ è il "gradiente" associato ai campi e $W^{\varepsilon,2}$ è lo spazio di Sobolev usuale di ordine ε). allora dall'immersione classica $W^{\varepsilon,2} \subset L^{2n/(n-2\varepsilon)}$ otteniamo

$$\|u\|_{L^{2n/(n-2\varepsilon)}} \lesssim \|Xu\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}, \tag{7}$$

che è (1), almeno per $p = 2$.

La (6) vale con $\varepsilon = 1/r$ (si veda ad esemipo [RS]) se i campi soddisfano la condizione di Hörmander di passo r, cioè se

$$\dim(\mathrm{span}\{X_{[I]}(x) : |I| \le r\}) = n, \tag{8}$$

in ogni punto $x \in \Omega$. (Qui, se $I = (i_1, \dots, i_p)$, $X_{[I]} = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}]]]$ e $|I| = p$).

La (6) vale anche per le famiglie di campi di tipo diagonale a coefficienti non regolari, studiate da Franchi e Lanconelli [FL], del tipo $X_j = \lambda_j(x)\partial_j$, $j = 1, \dots, n$, dove le λ_j soddisfano condizioni convenienti.

Metodo 2. Se $X_1, \dots, X_m$ sono campi di Hörmander, allora $u \in C_0^\infty(\Omega)$ si rappresenta come segue:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega X_j\Gamma(x,y)X_ju(y)dy, \tag{9}$$

dove $\Gamma(x,\cdot)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore $\sum_{j=1}^m X_j^* X_j$ con polo in x. (Qui $X_j^* = -X_j - \mathrm{div}X_j$ è l'aggiunto formale (in L^2) di X_j) Usando le stime di Sánchez Calle [SC]

$$|X\Gamma(x,y)| \lesssim \frac{d(x,y)}{|B(x, d(x,y))|}$$

($d(x,y)$ è la distanza di Carnot-Carathéodory (si veda il Paragrafo 3) e $|\cdot|$ la misura di Lebesgue) e il fatto che l'operatore $I_1f(x) \equiv \int_\Omega f(y)d(x,y)/|B(x,d(x,y))|dy$ soddisfa la seguente proprietà di continuità

$$\|I_1f\|_{L^{pQ/(Q-p)}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

(qui $1 < p < Q$, con $Q > n$ che dipende da Ω e dai campi) si prova che (1) vale con $q = pQ/(Q-p)$.

Metodo 3. Un altro modo per provare disuguaglianze di Sobolev consiste nell'uso di disuguaglianze di tipo Poincaré.

Se $d(x,y)$ indica la distanza di Carnot-Carathéodory associata ai campi X_j, e si suppone che valga la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_B |u(x) - u_B|dx \leq c_1 r \int_{c_2 B} |Xu(x)|dx, \quad u \in C^1(B), \tag{10}$$

($B = B(x_0, r)$ palla di raggio r relativa alla distanza d, $c_2 B \equiv B(x_0, c_2 r)$, $u_B \equiv \fint_B u \equiv \frac{1}{|B|}\int_B u$

$$|2B| \leq 2^Q |B|,$$

(con c_1, c_2 e Q indipendenti da B), allora vale

$$\left(\fint_B |u(x) - u_B|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq cr \left(\fint_B |Xu(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in C^1(B) \tag{11}$$

con $q = Qp/(Q-p)$. Sotto varie forme il risultato è dovuto a vari autori (citiamo ad esempio Saloff Coste [S], Biroli e Mosco [BM], Franchi Lu e Wheeden [FLW], Hajłasz e Koskela [HK], Garofalo e Nhieu [GN]).

La (11) implica facilmente la disuguaglianza di Sobolev per funzioni a supporto compatto su un aperto limitato Ω

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^{pQ/(Q-p)} dx\right)^{\frac{Q-p}{pQ}} \leq c \left(\int_\Omega |Xu(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in C_0^1(\Omega).$$

D'altra parte, nel lavoro [BCLS] è provato che la disuguaglianza per funzioni a supporto compatto su un aperto limitato Ω segue dall'esistenza di una famiglia di "operatori di media" $(M_r)_{0<r<1}$ con le seguenti proprietà:

$$|M_r u(x)| \lesssim \frac{1}{r^Q} \|u\|_{L^1(\Omega)}, \quad x \in \Omega \tag{12}$$

$$\int_\Omega |u(x) - M_r u(x)|^p \leq cr^p \int_\Omega |Xu|^p. \tag{13}$$

(Nel caso euclideo basta prendere $M_r u(x) = (1/r^n)\int_{B(x,r)} u$. Anche nel caso Hörmander (12) ed (13) si possono verificare, usando gli strumenti introdotti in [LMor]).

Un caso non regolare. Il risultato di Lanconelli e Montanari (che adesso richiamiamo) si inserisce nella filosofia del Metodo 1 sopra descritto ((7) come conseguenza di (6)). La tecnica usata dagli autori è però nuova. Riportiamo per semplicità il risultato in una versione meno generale di quella provata in [LMon].

Teorema 2.1 *([LMon]) Consideriamo i campi $X_j = \partial_j + a_j\partial_3$ in $\mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$. Sia Ω un aperto limitato. Se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$q \equiv \frac{1}{\lambda} \equiv X_1 a_2 - X_2 a_1 \in [\delta, 1/\delta], \quad in\ \Omega \tag{14}$$

allora vale la disuguaglianza

$$\|u\|_{W^{1/2,2}(\Omega)} \leq M(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Xu\|_{L^2(\Omega)}) \tag{15}$$

e la costante M in (15) dipende dalle seguenti quantità:

$$M = M\left(\delta, \|a_j\|_{W^{2,2}}, \|X\lambda\|_{L^6}\right). \tag{16}$$

Osservazioni.

1. Usando il Teorema appena citato e l'immersione classica $\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1/2,2}(\Omega)}$ si riconosce subito che
$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq M(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Xu\|_{L^2(\Omega)}) \tag{17}$$

2. Come già osservato nell'introduzione per il caso generale, la disuguaglianza (14) è formalmente la condizione di Hörmander di passo 2. Se i campi fossero abbastanza regolari, varrebbe la disuguaglianza di Poincaré, come provato in [J] per campi di classe C^k, per un $k > 1$ opportuno (si veda anche [LMor] per il caso di campi C^1). Allora, in base alle osservazioni fatte poco sopra, si avrebbe la
$$\|u\|_{L^{pQ/(Q-p)}} \lesssim \|Xu\|_{L^p},$$
che, per $p = 2$, essendo $Q = 4$, dà
$$\|u\|_{L^4} \lesssim \|Xu\|_{L^2}. \tag{18}$$
L'esponente di sommabità è quindi migliore di quello in (17), ma le condizioni di regolarità richieste sui campi rendono (18) non utilizzabile per le applicazioni a equazioni non lineari (si veda [CLM]).

3 L'immersione

Qui proviamo il seguente risultato, che si affianca al Teorema 2.1, ma è ottenuto con una tecnica diversa (più ispirata al Metodo 2 descritto nel paragrafo precedente). Diamo una versione semplificata in $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.1 *Consideriamo i campi $X_j = \partial_j + a_j\partial_3$ in $\mathbb{R}^3$, $j = 1, 2$. Sia Ω un aperto limitato e poniamo $Q = 4$. Se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$q \equiv \frac{1}{\lambda} \equiv X_1 a_2 - X_2 a_1 \in [\delta, 1/\delta], \quad in\ \Omega \tag{19}$$

allora vale

$$\|f\|_{L^{pQ/(Q-p)}} \leq M\|Xf\|_{L^p}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega),$$

dove fissati $p \in]1, Q[$ e l'aperto Ω la costante M dipende dalle seguenti quantità:

$$M = M(\delta, \|a_j\|_{W^{1,\infty}}, \|X\lambda\|_{L^4}). \tag{20}$$

Osservazione. *Nel Teorema 3.1 richiediamo la lipschizianità dei campi ($a_j \in W^{1,\infty}$), che non è richiesta nel Teorema 2.1. D'altra parte qui non richiediamo ipotesi di sommabilità sulle derivate seconde dei coefficienti. Inoltre il Teorema 3.1 vale per ogni $p > 1$, mentre il metodo di prova in [LMon] non sembra estendersi al caso $p \neq 2$.*

Dimostrazione del Teorema. L'idea della prova (già utilizzata da Citti [C] e Citti Lanconelli e Montanari [CLM]) consiste nel fare un' approssimazione locale dei campi con dei campi invarianti a sinistra su un opportuno Gruppo di Lie nilpotente di passo 2.

Poniamo innanzitutto, per un $\bar{x} \in \Omega$,

$$a_{j,\bar{x}}(x) = a_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{2} X_i a_j(\bar{x})(x_i - \bar{x}_i)$$

e definiamo i campi "congelati", come in [C, p. 522]

$$X_{j,\bar{x}} = \partial_j + a_{j,\bar{x}}\partial_3.$$

Si può verificare che il commutatore dei campi congelati è costante e soddisfa

$$[X_{1,\bar{x}}, X_{2,\bar{x}}] = [X_1, X_2](\bar{x}) = (1/\lambda(\bar{x}))\partial_3.$$

L'operatore $X_{1,\bar{x}}^2 + X_{2,\bar{x}}^2$ è ipoellittico e chiamiamo $\Gamma_{\bar{x}}(x,y)$ la sua soluzione fondamentale con polo in x. Possiamo rappresentare ora la funzione $f \in C_0^\infty(\Omega)$ nel punto x congelando in x stesso e usando (9):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{2} \int X_{j,x}\Gamma_x(x,y) X_{j,x} f(y)dy \\ &= \sum_{j=1}^{2} \int X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(X_{j,x} - X_j + X_j) f(y)dy \\ &= \sum_{j=1}^{2} \int X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y) - a_j(y)) \frac{\partial}{\partial y_3} f(y)dy \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2} \int X_{j,x}\Gamma_x(x,y) X_j f(y)dy \\ &\equiv I_1(x) + I_1'(x). \end{aligned} \tag{21}$$

Per valutare il termine I_1' (in particolare il nucleo $X_{j,x}\Gamma_x(x,y)$) usiamo il seguente Lemma:

Lemma 3.1 *Vale la disuguaglianza*

$$|X_{j_1,x}X_{j_2,x}\cdots X_{j_k,x}\Gamma_x(x,y)| \leq c\frac{1}{\rho(x,y)^{Q-2+k}}, \qquad k \geq 0,$$

dove

$$\rho(x,y) \geq c|x-y| \tag{22}$$

è tale che $|\{y : \rho(x,y) < r\}| \sim r^Q$. *Inoltre l'operatore "di convoluzione"*

$$T_\mu f(x) \equiv \int_\Omega \frac{f(y)dy}{\rho(x,y)^{Q-\mu}}, \qquad x \in \Omega, \qquad 0 < \mu < Q$$

soddisfa

$$\|T_\mu f\|_{pQ/(Q-\mu p)} \lesssim \|f\|_p, \quad 1 < p < Q/\mu, \quad f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Traccia di prova del Lemma. Poniamo

$$\phi_x(h) \equiv \exp\left(h_1 X_{1,x} + h_2 X_{2,x} + h_3[X_{1,x}, X_{2,x}]\right)(0). \tag{23}$$

(Se Z è un campo vettoriale indichiamo con $\exp(Z)(x)$ la soluzione al tempo $t = 1$ (quando è definita) del problema di Cauchy $\dot\gamma = Z(\gamma)$, $\gamma(0) = x$). Si calcola poi esplicitamente

$$\begin{aligned}\phi_x(h) &= \left(h_1, h_2, q(x)h_3 + h_1 a_{1,x}\left(\frac{h}{2}\right) + h_2 a_{2,x}\left(\frac{h}{2}\right)\right). \\ &= \left(h_1, h_2, q(x)h_3 + \sum_{i=1}^{2} h_i\left\{a_i(x) + \sum_{p=1}^{m} X_p a_i(x)\left(\frac{h_p}{2} - x_p\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

Dato che le funzioni $a_{j,x}$ non dipendono da h_3, la mappa ϕ_x ha una forma triangolare ed è globalmente invertibile non appena $q(x) \neq 0$ (nelle nostre ipotesi $q(x) \in [\delta, 1/\delta]$). Inoltre, si può calcolare che i campi trasformati degli X_j attraverso ϕ_x^{-1} sono i due campi

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial h_1} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial h_3}, \qquad H_2 = \frac{\partial}{\partial h_2} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial h_3},$$

cioè i campi invarianti a sinistra sul Gruppo di Heisenberg.

Questa osservazione, unita alla conoscenza esplicita della soluzione fondamentale del laplaciano $H_1^2 + H_2^2$ permette di scrivere e stimare in modo esplicito il nucleo ottenendo la prova del Lemma (di cui tralasciamo i dettagli). □

Il Lemma consente subito di stimare il termine I_1':

$$\|I_1'\|_{L^{pQ/(Q-p)}} \lesssim \|Xf\|_{L^p}, \qquad p > 1.$$

Usando ora il fatto che $\partial_3 = \lambda[X_1, X_2]$ osserviamo che la stima di I_1 sarà provata non appena si saprà stimare la norma in $L^{pQ/(Q-p)}$ nella variabile x del seguente integrale

$$\int X_{j,x}\Gamma(x,y)(a_{j,x}(y) - a_j(y))\lambda(y)X_i X_h f(y)dy \equiv J(x), \tag{24}$$

con $i, j, h = 1, 2$. Integrando per parti in (24) (usiamo $X_i^* = -X_i - \text{div } X_i$) troviamo

$$\begin{aligned}
J(x) &= -\int_\Omega X_i\Big[X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)\Big]X_hf(y)dy \\
&\quad -\int_\Omega \text{div}X_i(y)\Big[X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)\Big]X_hf(y)dy \\
&= -\int X_iX_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)X_hf(y)dy \\
&\quad -\int X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(X_ia_j(y)-X_ia_{j,x}(y))\lambda(y)X_hf(y)dy \\
&\quad -\int X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))X_i\lambda(y)X_hf(y)dy \\
&\quad -\int \text{div}X_i(y)\Big[X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)\Big]X_hf(y)dy \\
&\equiv B(x)+B_1(x)+B_2(x)+B_3(x)+B_4(x).
\end{aligned}$$

Questa integrazione per parti è fatta con funzioni singolari (la $\Gamma_x(x,y)$ non è regolare in $y = x$). Il passaggio può però essere reso rigoroso troncando il dominio vicino ad x e facendo un passaggio al limite.

Se poi riscriviamo $B(x)$ usando di nuovo $X_i = X_i - X_{i,x} + X_{i,x}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
B(x) &= \int_\Omega (a_i(y)-a_{i,x}(y))\partial_{y_3}X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)X_hf(y)dy \\
&\quad +\int_\Omega X_{i,x}X_{j,x}\Gamma_x(x,y)(a_{j,x}(y)-a_j(y))\lambda(y)X_hf(y)dy \\
&= B_5(x)+B_6(x).
\end{aligned}$$

Per concludere la prova, osserviamo che la lipschitzianità dei coefficienti e la (22) danno la disuaglianza

$$|a_{j,x}(y)-a_j(y)| \lesssim |x-y| \lesssim \rho(x,y).$$

Questa permette di maggiorare ognuno dei termini B_j nel modo seguente:

$$|B_j(x)| \le T_1(|Xf|)(x).$$

Basterà poi usare il Lemma 3.1 per avere l'immersione cercata. □

4 Commenti finali

Distanza di controllo Se $X_1, \dots, X_m$ sono dei campi lipschitziani, diciamo che una curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ è subunitaria se soddisfa $\dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^m c_j(t)X_j(\gamma(t))$, con $\sum_{j=1}^m c_j(t)^2 \le 1$, per quasi ogni $t \in [0,T]$. Assumendo che per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$ esista almeno una curva subunitaria che connette x e y si definisce

$$\begin{aligned}
d(x,y) = \inf\{T>0 : &\text{ esiste una curva subunitaria } \gamma:[0,T]\to\mathbb{R}^n, \\
&\text{tale che} \quad \gamma(0)=x, \quad \gamma(T)=y\}.
\end{aligned}$$

Si verifica che $(x,y) \mapsto d(x,y)$ è una distanza (detta *distanza di Carnot-Carathéodory*).
Non è chiaro se dati due campi X_1 e X_2 che soddisfano le ipotesi del Teorema 3.1 la distanza d è finita (cioè se dati due punti esiste almeno una curva subunitaria che li connette). In alcuni casi particolari ($a_1 = 0$ oppure a_1 e a_2 indipendenti da x_3) questo avviene, anche nella sola ipotesi di lipschizianità dei campi e si riesce a provare anche la disuguaglianza di Poincaré (10).

Il caso $p = 1$. Il caso $p = 1$ si presta ad essere trattato (si veda ad esempio Franchi, Gallot e Wheeden [FGW]) usando delle tecniche di troncamento che permettono di passare da una stima debole del tipo

$$\sup_{\lambda>0} \lambda |\{|u| > \lambda\}|^{(Q-1)/Q} \lesssim \|Xu\|_{L^1}$$

alla stima forte

$$\|u\|_{L^{Q/(Q-1)}} \lesssim \|Xu\|_{L^1}.$$

In generale, se per una famiglia di campi lipschitziani si assume che $d(x,y)$ è continua e che vale la disuguaglianza di Sobolev con $p = 1$ su un certo aperto Ω,

$$\left(\int_\Omega |u|^{Q/(Q-1)}\right)^{(Q-1)/Q} \leq c_0 \int_\Omega |Xu|, \qquad u \in C_0^1(\Omega), \tag{25}$$

allora vale la stima seguente della misura della palla di Carnot-Carathéodory

$$|B(x,r)| \geq cr^Q.$$

Questo fatto si riconosce usando il risultato di Franchi, Serapioni e Serra Cassano [FSSC] e Garofalo e Nhieu [GN2] sull'esistenza di una funzione f supportata su una palla $B(x,R)$, che valga 1 sulla palla $B(x,r)$ e con $|Xf| \lesssim 1/(R-r)$. Scrivendo la (25) per f si ottiene

$$|B_r|^{(Q-1)/Q} \leq c_0 \frac{|B_R| - |B_r|}{R-r}.$$

Poi, scritto, $\omega(r) = |B_r|$, con qualche passaggio un po' disinvolto si ha

$$\omega^{(Q-1)/Q} \leq c_0 \omega' \Rightarrow (\omega^{1/Q})' \geq c_1 \Rightarrow \omega(r) \geq c_2 r^Q.$$

Riferimenti bibliografici

[BCLS] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux e L. Saloff Coste, *Sobolev inequalities in disguise,* Indiana Univ. Math J. 44 (1995), 1033-1074.

[BM] M. Biroli e U. Mosco, *Sobolev inequalities on homogeneous spaces*, Potential Anal. 4 (1995), 311-324.

[C] G. Citti, C^∞ *regularity of solutions of the Levi equation,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **15** (1998), 517–534.

[CLM] G. Citti, E. Lanconelli ed A. Montanari, *On the interior C^∞-solvability of the Dirichlet problem for the prescribed Levi-curvature equation,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 10, (1999), 61-68

[FGW] B. Franchi, S. Gallot e R. L. Wheeden, *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics,* Math. Ann. **300** (1994), 557–571.

[FL] B. Franchi ed E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **10** (1983), 523–541.

[FLW] B. Franchi, G. Lu e R. L. Wheeden, *A relationship between Poincaré type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type,* Internat. Math. Res. Notices, 1996, no. 1, 1–14.

[FSSC] B. Franchi, R. Serapioni e F. Serra Cassano, *Approximation and embedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields,* Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 11 (1997), 83–117.

[GN] N. Garofalo e D. M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces,* Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 1081–1144.

[GN2] N. Garofalo e D. M. Nhieu, *Lipschitz continuity, global smooth approximations and extension theorems for Sobolev functions in Carnot-Carathéodory Spaces,* J. Anal. Math. **74**(1998), 67–97.

[HK] P. Hajłasz e P. Koskela, *Sobolev meets Poincaré,* C. R. Acad. Sci. Paris **320** (1995), 1211–1215.

[J] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition,* Duke Math J. **53** (1986), 503–523.

[LMon] E. Lanconelli e A. Montanari *An embedding theorem for non smooth vector fields of step two,* Le Matematiche **LIV** (1999) - Supplemento, 111–124.

[LMor] E. Lanconelli e D, Morbidelli, *On the Poincaré inequality for vector fields,* Ark. Mat. (in corso di stampa.)

[MM] A. Montanari e D. Morbidelli, *in preparazione,*

[RS] L. Rothschild e E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotents groups,* Acta Math. **137** (1976), 247–320.

[S] Saloff-Coste, L., *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities,* Internat. Math. Res. Notices, 1992, no. 2, 27–38.

[SC] A. Sánchez Calle, *Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields,* Invent. Math. **78** (1984), 143-160.